

Wzorcowe rozwiązania zadań z kolokwium nr 1 z analizy matematycznej II.1

4 – 7 grudnia 2020, 12:00

Zad 1 (10 pkt.). Wyznacz punkty różniczkowalności funkcji $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x, y, z) = \sqrt{|(x-1)(y-3)(z-5)|}.$$

Rozwiązanie:

Funkcja jest różniczkowalna w każdym punkcie (x, y, z) takim, że $x \neq 1, y \neq 3, z \neq 5$ jako złożenie funkcji różniczkowalnych (**1 punkt**). Pozostałe punkty wygodnie jest podzielić na trzy przypadki (3 p. za każdy przypadek):

1. Dokładnie jeden z czynników pod pierwiastkiem się zeruje. Rozważmy punkt $(1, y, z), y \neq 3, z \neq 5$. Mamy

$$f_x(1, y, z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t, y, z) - f(1, y, z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|t||y-3||z-5|}}{t}.$$

Granica nie istnieje ponieważ $|y-3||z-5| \neq 0$, zatem nie istnieje pochodna cząstkowa względem x , czyli funkcja nie może być różniczkowalna. Analogicznie w punktach $(x, 3, z), x \neq 1, z \neq 5$ nie istnieje pochodna cząstkowa wzgl. y natomiast w punktach $(x, y, 5), x \neq 1, y \neq 3$ nie istnieje pochodna cząstkowa wzgl. z więc funkcja nie jest tam różniczkowalna.

2. Dokładnie dwa czynniki pod pierwiastkiem się zerują. Wówczas iloraz różnicowy w definicji pochodnej cząstkowej względem każdej ze zmiennych będzie tożsamościowo równy zero, zatem wszystkie pochodne cząstkowe istnieją i są równe zero. Trzeba więc sprawdzić czy $[0, 0, 0]$ jest różniczką funkcji. Rozważmy punkt $(1, 3, z), z \neq 5$:

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f((1, 3, z) + h) - f(1, 3, z)}{\|h\|} &= \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(1 + h_1, 3 + h_2, z + h_3) - 0}{\|h\|} = \\ \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h_1||h_2||z + h_3 - 5|}}{\|h\|} &= \sqrt{|z-5|} \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h_1||h_2|}}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Granica nie istnieje ponieważ $z-5 \neq 0$, więc funkcja nie jest różniczkowalna. Analogicznie w pozostałych punktach w których zerują się dokładnie dwa czynniki badając różniczkowalność dostajemy granicę $\frac{\sqrt{|h_1||h_2|}}{\|h\|}$ pomnożoną przez niezerową stałą. Granica nie istnieje, więc funkcja nie jest różniczkowalna.

3. $(x, y, z) = (1, 3, 5)$ Podobnie jak w poprzednim punkcie możemy od razy zauważyć że wszystkie pochodne cząstkowe istnieją i są równe zero. Sprawdzając z definicji czy $[0, 0, 0]$ jest różniczką dostajemy

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f((1, 3, 5) + h) - f(1, 3, 5)}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h_1||h_2||h_3|}}{\|h\|} = 0,$$

co wynika np. z faktu że $\frac{\sqrt{|h_1||h_2|}}{\|h\|}$ jest ograniczone oraz $h_3 \rightarrow 0$. Zatem f jest różniczkowalna w punkcie $(1, 3, 5)$ i $Df(1, 3, 5) = [0, 0, 0]$.

Zad 2 (10 pkt.). Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(x, y) = (3x^2 + 2xy + 3y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

(a) Wyznacz wszystkie punkty krytyczne funkcji f .

- (b) Dla każdego punktu krytycznego określ, czy f ma w tym punkcie minimum lokalne, maksimum lokalne czy nie ma ekstremum lokalnego.
- (c) Wyznacz kresy funkcji f na $\mathbb{R}^2$.

Rozwiązanie:

Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ jest punktem krytycznym funkcji f jeśli macierz Jacobiego tej funkcji w punkcie (x, y) nie jest pełnego rzędu. Ponieważ f działa w $\mathbb{R}$, to warunek ten jest równoważny zerowaniu się gradientu funkcji f w punkcie (x, y) .

$$\text{grad } f(x, y) = \left[2y + x(6 - 3x^2 - 2xy - 3y^2), 2x + y(6 - 3x^2 - 2xy - 3y^2) \right] e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Do wyznaczenia charakteru punktów krytycznych przyda nam się także druga różniczka funkcji f (funkcja f jest funkcją gładką jako iloczyn wielomianu z funkcją wykładniczą złożoną z innym wielomianem), którą można tutaj zapisać w postaci macierzy 2×2

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{bmatrix} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_{xx} &= 3x^2(x^2 - 5) + 2xy(x^2 - 3) + 3(x^2 - 1)y^2 + 6, \\ a_{xy} &= 3x^3y + 2(y^2 - 1)x^2 + 3xy(y^2 - 4) - 2y^2 + 2, \\ a_{yy} &= 3x^2(y^2 - 1) + 2xy(y^2 - 3) + 3y^2(y^2 - 5) + 6. \end{aligned}$$

Wyznamy teraz punkty krytyczne f . Równanie $\text{grad } f(x, y) = 0$ jest równoważne układowi równań

$$0 = 2y + x(6 - 3x^2 - 2xy - 3y^2), \quad (1a)$$

$$0 = 2x + y(6 - 3x^2 - 2xy - 3y^2). \quad (1b)$$

Jeśli $x = 0$, to z równania (1a) wynika, że $y = 0$. Zatem mamy pierwszy punkt krytyczny funkcji f — $P_0 = (0, 0)$. Funkcja f jest symetryczna względem zamiany zmiennej x ze zmienną y , więc aby znaleźć pozostałe punkty krytyczne możemy założyć, że $x \neq 0$ oraz $y \neq 0$. Mnożąc równanie (1a) stronami przez y a równanie (1b) przez x i odejmując stronami otrzymujemy równość $y^2 = x^2$, co oznacza, że $x = y$ lub $x = -y$. Wstawiając każdą z tych zależności do (1a) (lub do (1b)) otrzymujemy, odpowiednio, $1 = 4x^2 - 3$ lub $1 = 3 - 2x^2$, a zatem $x = \pm 1$ oraz $y = \pm 1$. Mamy zatem cztery punkty będące kandydatami na punkty krytyczne:

$$P_1 = (1, 1), \quad P_2 = (1, -1), \quad P_3 = (-1, 1), \quad P_4 = (-1, -1).$$

Wstawiając współrzędne punktów P_i , $i = 1, 2, 3, 4$ do jednego z równań (1) można sprawdzić, że równania są spełnione, więc punkty te są punktami krytycznymi.

Charakter punktu P_0 . Macierz drugiej różniczki jest postaci:

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},$$

Z kryterium Sylwestera wynika, że jest ona dodatnio określona (wyznaczniki minorów są równe 2 i 32), a zatem z warunku dostatecznego istnienia ekstremów wynika, że f ma w P_0 minimum lokalne.

Charakter punktów P_1 i P_4 . Macierz drugiej różniczki jest postaci:

$$H(1, 1) = H(-1, -1) = \begin{bmatrix} -10 & -6 \\ -6 & -10 \end{bmatrix} e^{-1},$$

Z kryterium Sylwestera wynika, że jest ona ujemnie określona (wyznaczniki minorów są równe -2 i 64), a zatem z warunku dostatecznego istnienia ekstremów wynika, że f ma w P_1 i P_4 maksima lokalne.

Charakter punktów P_2 i P_3 . Macierz drugiej różniczki jest postaci:

$$H(1, -1) = H(-1, 1) = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} e^{-1},$$

Macierz nie jest ani dodatnio ani ujemnie określona. Skoro macierz drugiej różniczki jest nieokreślona, to funkcja nie ma w tym punkcie ekstremum. Rzeczywiście, zauważmy jednak, że

$$[1, 1]H(1, -1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{8}{e}, \quad [-1, 1]H(1, -1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-16}{e}.$$

Z tego wynika, że wartości funkcji rosną w otoczeniu P_2 i P_3 wzdłuż prostej wyznaczonej przez wektor $[1, 1]$ i maleją wzdłuż prostej wyznaczonej przez wektor $[-1, 1]$. A zatem, w tych punktach f nie ekstremów lokalnych.

Wyznaczenie kresów funkcji f . Zauważmy, że

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = (x + y)^2 + 2(x^2 + y^2) \geq 0.$$

Zatem $f(x, y) \geq 0$ oraz $f(0, 0) = 0$. Zatem $\inf_{\mathbb{R}^2} f = 0$.

Wykażemy, że kres górny f osiąga w P_1 i w P_4 . Wiemy, że w tych punktach f ma maksima lokalne, ale ponieważ $\mathbb{R}^2$ nie jest zwarte, to nie wiemy czy f osiąga kres górny. Zbadajmy jakie wartości przyjmuje funkcja f na okręgu o środku w zerze i promieniu r . Wprowadźmy nowe zmienne (r, φ) :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Wówczas

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad 2xy = r^2 \sin(2\varphi).$$

Stąd

$$f(x, y) = (3r^2 + r^2 \sin(2\varphi)) e^{-\frac{r^2}{2}} = (3 + \sin(2\varphi)) r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} \leq 4r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}.$$

Podstawiając $r^2 = 2t$ dostajemy

$$4r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} = 8t e^{-t} = g(t).$$

Zauważmy, że $g'(t) = (1 - t) e^{-t}$, więc funkcja g ma maksimum w $t = 1$ oraz $g(1) = 8 e^{-1}$. A zatem

$$f(x, y) \leq 4r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} \leq g(1) = \frac{8}{e}.$$

Ponieważ $f(1, 1) = \frac{8}{e}$, to jest to kres górny funkcji f na $\mathbb{R}^2$.

Można też argumentować, że dla „dużych” (x, y) funkcja wykładnicza zdominuje wielomian i wartości funkcji f będą małe. Jeśli weźmiemy r odpowiednio duże, to $f(x, y) \leq 1$ dla $(x, y) \notin B(0, r)$, a zatem $f(x, y) < f(1, 1) = 8 e^{-1}$. Ponieważ kula domknięta $\bar{B}(0, r)$ jest zwarta, to f osiąga na tej kuli swoje maksimum. Nie może go osiągać na okręgu $S(0, r)$, bo na nim wartości funkcji są nie większe niż $1 < 8/e$, więc osiąga je w punktach P_1 i P_4 . Ponieważ poza kulą $B(0, r)$ wartości funkcji f także są nie większe niż $1 < f(1, 1)$, to $f(1, 1) = 8/e$ jest kresem górnym f na $\mathbb{R}^2$.

Kryteria oceny:

1. Policzenie gradientu - 1 punkt,
2. Znalezienie punktów krytycznych - 2 punkty,
3. Ekstrema lokalne - 4 punkty,

4. Kres dolny - 1 punkt,
5. Kres górny - 2 punkty.

Zad 3 (10 pkt.). Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ i spełnia warunki:

$$4x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

$$f(x, 0) = xe^{-x^2} \quad \forall x \geq 0.$$

Wykaż, że f ma jedno minimum lokalne właściwe i nieskończenie wiele maksimumów lokalnych niewłaściwych.

Wskazówka: Znajdź rodzinę zbiorów na których f jest stała.

Rozwiązanie:

Rozważmy parametryzację biegunową elipsy $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = r^2$:

$$(x, y) = \Phi_a(r, \alpha) = (r \cos \alpha, ar \sin \alpha).$$

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \circ \Phi_a)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -r \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + ar \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ &= -\frac{y}{a} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + ax \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{\partial(f \circ \Phi_a)}{\partial \alpha} = 0 \iff y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a^2 x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Z warunków zadania wynika więc że funkcja jest stała na elipsach $x^2 + \frac{y^2}{4} = r^2$. Mamy $f(x, 0) = xe^{-x^2} > 0$ dla $x > 0$, więc wartości funkcji są ściśle dodatnie dla $(x, y) \neq (0, 0)$, stąd $f(0, 0) = 0$ jest minimum lokalnym właściwym. Zauważmy że funkcja nie może mieć innych ekstremów właściwych, ponieważ dla każdego punktu $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ mamy $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ dla (x, y) leżących na elipsie przechodzącej przez (x_0, y_0) . Aby wyznaczyć ew. ekstrema niewłaściwe wystarczy zbadać przebieg funkcji $g(x) = xe^{-x^2}$ dla $x > 0$. Mamy

$$g'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} = 0 \iff x \in \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\},$$

zatem dla $x > 0$ mamy jeden punkt krytyczny $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i ze znaków pochodnej w otoczeniu widzimy że jest to maksimum lokalne. Stąd każdy punkt elipsy $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{2}$ jest maksimum lokalnym niewłaściwym.

Uwaga 1. Wiedząc że funkcja jest stała na elipsach i mając wzór na $f(x, 0)$ możemy bez trudu wypisać f jawnym wzorem:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}} e^{-x^2 - \frac{y^2}{4}},$$

wyznaczyć jej punkty krytyczne i zbadać czy są to ekstrema. Nie jest to błąd ale niepotrzebne dodawanie sobie pracy - łatwiej wnioskować o ekstremach tak jak wyżej.

Uwaga 2. Możemy również rozważać parametryzację elipsy $(t, \sqrt{c - 4t^2})$ oraz $(t, -\sqrt{c - 4t^2})$ dla $t \in (-\frac{\sqrt{c}}{2}, \frac{\sqrt{c}}{2})$. Obliczając pochodne złożenia dostajemy stałość wzdłuż obu połówek elipsy, co w połączeniu z

ciągłością f daje stałość na całej elipsie. Współrzędne biegunowe dają nieco prostrze rachunki, chociaż w tym przypadku też nie są one skomplikowane.

Uwaga 3. W przedstawionym rozwiązaniu najpierw wpadliśmy na to żeby rozważać elipsy, naturalne jest pytanie w jaki sposób? Przedstawimy trzy:

Sposób I: (najprostszy) to przypomnienie sobie (było to tematem jednego z zadań przygotowawczych) że funkcja stała wzdłuż okręgów o środku w $(0, 0)$ spełnia równanie $xf_y = yf_x$. Równanie z zadania wygląda podobnie, stąd można wpaść na pomysł rozpatrywania elips.

Sposób II: Równanie $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ oznacza, że w każdym punkcie $(x, y) \neq (0, 0)$ gradient f jest prostopadły do wektora $(-y, 4x)$. Zatem $\nabla f(x, y) = c[4x, y]$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$. Z drugiej strony wiemy, że gradient funkcji różniczkowalnej jest prostopadły do poziomicy. Dla $F(x, y) = 4x^2 + y^2$ mamy $\nabla F(x, y) = 2[4x, y]$, czyli $\nabla f(x, y)$ jest prostopadły do poziomicy F przechodzącej przez (x, y) . Zatem poziomice F powinny być dokładnie poziomiami f . Trzeba to jeszcze udowodnić a chyba najprostrzym sposobem jest właśnie obliczenie pochodnej złożenia wzdłuż elipsy.

Sposób III: Przedstawimy jeszcze najbardziej ogólną metodę wykraczającą nieco poza program ponieważ w ogólności wymaga rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Chcemy wyznaczyć rodzinę krzywych $(x(t), y(t))$ wzdłuż których f jest stała, czyli $f(x(t), y(t)) \equiv 0$. Różniczkując ostatnią tożsamość względem t dostajemy

$$x'(t)f_x(x, y) + y'(t)f_y(x, y) = 0.$$

Porównując tę tożsamość z naszym równaniem dostajemy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$x'(t) = -y, \quad y'(t) = 4x. \quad (2)$$

Jest to układ równań liniowych o stałych współczynnikach. Ogólną teorię dla takich układów poznać Państwo w przyszłym semestrze na zajęciach z RRZ, jednak w tym prostym przypadku możemy "zgadnąć" że rodziną rozwiązań jest

$$x(t) = r \cos(2t), \quad y(t) = 2r \sin(2t). \quad (3)$$

Otrzymaliśmy więc parametryzację tej samej rodziny elips z przeskalowanym kątem. Warto zauważyć że funkcje postaci (3) nie są jedynymi rozwiązaniami układu (2). Rozwiązaniami są dowolne funkcje postaci

$$x(t) = A \sin(2t) + B \cos(2t), \quad y(t) = 2B \sin(2t) - 2A \cos(2t) \quad (4)$$

dla pewnych stałych A, B (dla $A = 0, B = r$ otrzymujemy (3)). Jednak jeżeli nasza funkcja jest stała na rozwiązaniach to wszystkie rozwiązania (4) muszą opisywać tę samą rodzinę elips ponieważ pokrywa ona całą płaszczyznę. Jest tak istotnie: dla $x(t), y(t)$ spełniających (4) mamy

$$(x(t))^2 + \frac{(y(t))^2}{4} = A^2 + B^2.$$

Otrzymujemy więc tę samą rodzinę elips, zmienia się tylko interpretacja parametru t .

Przedstawiona metoda rozwiązywania równania różniczkowego cząstkowego przez znalezienie krzywych wzdłuż których rozwiązanie jest stałe nosi nazwę *metody charakterystyk*. Można w ten sposób rozwiązać wiele równań cząstkowych 1. rzędu (tzn. zawierających tylko pochodne cząstkowe pierwszego rzędu), również znacznie bardziej skomplikowanych.

Zad 4 (10 pkt.). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ czterokrotnie różniczkowalną i załóżmy, że obie granice

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - e^{xy} \cdot \sin(x+y)}{(x+y)^4} \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x, x) + f(0, x)}{x}$$

istnieją, są skończone i są sobie równe. Wyznacz pochodną cząstkową $\frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y}(0, 0)$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy granicę z treści zadania przez g . Zauważmy że z założeń wynikają następujące równości

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - e^{xy} \cdot \sin(x+y) - g \cdot (x+y)^4}{(x+y)^4} = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x,x) + f(0,x) - g \cdot x}{x} = 0.$$

Pierwsza równość oznacza, że funkcja $a(x,y) := f(x,y) - e^{xy} \cdot \sin(x+y) - g \cdot (x+y)^4$ jest wyrażeniem rzędu $o((x+y)^4)$. Zauważmy, że

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{o((x+y)^4)}{\|(x,y)\|^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{o((x+y)^4)}{(x+y)^4}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{(x+y)^4}{\|(x,y)\|^4}}_{\text{ogr.}} = 0,$$

a zatem $a(x,y)$ jest również rzędu $o(\|(x,y)\|^4)$. Podobnie funkcja $b(x) := f(2x,x) + f(0,x) - g \cdot x$ jest rzędu $o(x)$.

Na mocy założenia o czterokrotnej różniczkowalności funkcji f , obie funkcje $a(x,y)$ oraz $b(x)$ mają rozwinięcie Taylora do rzędu 4 wokół, odpowiednio, $(0,0)$ i 0 . Z uwagi na równość $a(x,y) = o(\|(x,y)\|^4)$ rozwinięcie Taylora funkcji $a(x,y)$ wokół $(0,0)$ rzędu 4 jest zerowe, zaś z równości $b(x) = o(x)$ wnioskujemy, że rozwinięcie Taylora $b(x)$ wokół 0 rzędu 1 jest zerowe. Pozostaje wyrazić te dwa fakty w terminach pochodnych cząstkowych funkcji f .

Zacznijmy od funkcji b . Wartość $b(0) = 2f(0,0)$ zaś ze wzoru na pochodną złożenia $b'(x) = 2f'_x(2x,x) + f'_y(2x,x) + f'_y(0,x) - g$, skąd $b'(0) = 2f'_x(0,0) + 2f'_y(0,0) - g$. Wobec tego rozwinięcie Taylora $b(x)$ rzędu jeden wokół 0 wynosi

$$b(x) = 2f(0,0) + [2f'_x(0,0) + 2f'_y(0,0) - g] \cdot x + o(x).$$

Wiemy, że to rozwinięcie jest zerowe skąd $f(0,0) = 0$ oraz $g = 2f'_x(0,0) + 2f'_y(0,0)$.

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla funkcji $a(x,y)$. Rozwinięcie $f(x,y)$ rzędu 4 wyraża się w standardowy sposób przez pochodne cząstkowe. Z kolei rozwinięcie funkcji $e^{xy} \sin(x+y)$ to

$$e^{xy} \sin(x+y) = \left(1 + xy + \frac{x^2 y^2}{2!} + o(x^2 y^2)\right) \left(x + y - \frac{(x+y)^3}{3!} + o((x+y)^3)\right) = x + y - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + (x+y)xy + o(\|(x,y)\|^4).$$

Spójrzmy teraz na rozwinięcie Taylora funkcji $a(x,y)$ do stopnia 1

$$a(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y - x - y + o(\|(x,y)\|).$$

Ponieważ wiemy, że to rozwinięcie jest zerowe mamy ponownie $f(0,0) = 0$, oraz $f'_x(0,0) = 1 = f'_y(0,0)$, co pozwala wyliczyć, że $g = 4$. Na koniec spójrzmy na wyrazy stopnia 4 w rozwinięciu Taylora funkcji $a(x,y)$. Są to

$$\frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)x^4 + \frac{4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0)x^3 y + \frac{6}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0)x^2 y^2 + \frac{4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(0,0)xy^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(0,0)y^4 - g(x+y)^4.$$

Również i ten wielomian musi zniknąć jako fragment rozwinięcia $a(x,y)$ rzędu 4 wokół $(0,0)$. Porównując współczynniki przy $x^2 y^2$ wnioskujemy, że $\frac{6}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0) = g \cdot \binom{4}{2} = 4 \cdot 6$, skąd $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0) = 4 \cdot 4!$.

Zad 5 (10 pkt.). (a) Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją. Udowodnij, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

jest Lipschitzowskie (w normie euklidesowej) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest Lipschitzowska (w normie euklidesowej).

(b) Uzasadnij, że teza z punktu (a) pozostanie prawdziwa jeśli normę euklidesową w $\mathbb{R}^n$ i w $\mathbb{R}^{n+1}$ zastąpimy przez, odpowiednio, dowolną normę w $\mathbb{R}^n$ i w $\mathbb{R}^{n+1}$ (norma w $\mathbb{R}^n$ może być inna niż norma w $\mathbb{R}^{n+1}$).

Rozwiązanie:

Zacznijmy od tego, że mamy w tym zadaniu do czynienia z trzema przestrzeniami euklidesowymi: $\mathbb{R}$ (wartości funkcji f są skalarne), $\mathbb{R}^n$ (punkty $\mathbf{x}$), $\mathbb{R}^{n+1}$ (punkty $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$). W treści nie ma nic na temat tego, jaką wziąć normę na prostej - a to dlatego, że jedyną normą na $\mathbb{R}$ jest (z dokładnością do stałej) wartość bezwzględna. W części (a) warto napisać wyraźnie, że $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową (zarówno na $\mathbb{R}^n$ jak i na $\mathbb{R}^{n+1}$ - nie trzeba wprowadzać nowego oznaczenia ale nie wolno pogubić się w wymiarach) i pisać $|\cdot|$ tam, gdzie używamy wartości bezwzględnej na prostej. Można (ale nie trzeba, kwestia wygody) wprowadzić oznaczenie $F(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$, w tym rozwiązaniu będę go używać. W dalszej części (również dla wygody) nie będę pogrubiać liter x i y do oznaczenia punktów z $\mathbb{R}^n$.

(a) Pokażemy najpierw, że z Lipschitzowskości f wynika Lipschitzowskość F , zakładamy więc, że istnieje $L > 0$ takie że $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$ dla dowolnych punktów $x, y \in \mathbb{R}^n$. Z definicji normy euklidesowej mamy

$$\|F(x) - F(y)\| = \sqrt{\|x - y\|^2 + (f(x) - f(y))^2},$$

co w połączeniu ze spełnianiem przez f warunku Lipschitza daje

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \sqrt{\|x - y\|^2 + L^2\|x - y\|^2} = \sqrt{1 + L^2}\|x - y\|,$$

co oznacza, że F spełnia warunek Lipschitza ze stałą $\sqrt{1 + L^2}$.

Następnie pokażemy, że z Lipschitzowskości F wynika Lipschitzowskość f . W tym celu zakładamy, że istnieje K takie że $\|F(x) - F(y)\| \leq K\|x - y\|$ dla dowolnych punktów $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wartość $|f(x) - f(y)|$ możemy oszacować z nieujemności normy i monotoniczności pierwiastka, otrzymując w efekcie

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{\|x - y\|^2 + (f(x) - f(y))^2} = \|F(x) - F(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

Powyższa nierówność oznacza, że f spełnia warunek Lipschitza z tą samą stałą co F .

(b) Kluczowym pomysłem w tej części zadania było skorzystanie z równoważności norm. Niech $\|\cdot\|_*$ będzie dowolną normą na $\mathbb{R}^n$ a $\|\cdot\|_\#$ dowolną normą na $\mathbb{R}^{n+1}$ (na $\mathbb{R}$ cały czas będziemy używać normalnej wartości bezwzględnej jako normy). Normę euklidesową (zarówno na $\mathbb{R}^n$ jak i na $\mathbb{R}^{n+1}$ będziemy dalej oznaczać przez $\|\cdot\|$).

Równoważność norm mówi, że istnieją stałe $c, C > 0$ takie że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$c\|x\| \leq \|x\|_* \leq C\|x\|.$$

Analogicznie możemy stwierdzić, że istnieją stałe $d, D > 0$ takie że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ mamy

$$d\|x\| \leq \|x\|_\# \leq D\|x\|.$$

Zacznijmy podobnie jak w podpunkcie (a) od założenia, że to f spełnia warunek Lipschitza - tym razem względem normy z gwiazdką oraz z pewną stałą $\tilde{L}$. Mamy

$$|f(x) - f(y)| \leq \tilde{L}\|x - y\|_* \leq \tilde{L}C\|x - y\|,$$

czyli f spełnia warunek Lipschitza względem normy euklidesowej ze stałą $\tilde{L}C$. Z (a) wiemy, że to oznacza, że F spełnia warunek Lipschitza względem norm euklidesowych ze stałą $\sqrt{1 + |\tilde{L}C|^2}$. Teraz wystarczy ten warunek napisać i użyć odpowiednich nierówności z równoważności norm, żeby dostać

$$\frac{1}{D}\|F(x) - F(y)\|_\# \leq \sqrt{1 + |\tilde{L}C|^2} \cdot \frac{1}{c} \cdot \|x - y\|_*,$$

co po przemnożeniu stronami przez D da żądany warunek Lipschitza dla funkcji F .

Dalej musimy powtórzyć znane już rozumowanie - założmy, że F spełnia warunek Lipschitza względem norm z gwiazdką i kratką (polski odpowiednik słowa *hash*), z pewną stałą $\tilde{K}$. Piszemy

$$d\|F(x) - F(y)\| \leq \|F(x) - F(y)\|_\# \leq \tilde{K}\|x - y\|_* \leq \tilde{K}C\|x - y\|,$$

co pozwala stwierdzić, że F spełnia warunek Lipschitza względem norm euklidesowych ze stałą $\frac{C\tilde{K}}{d}$. Z (a) wiemy, że wobec tego f spełnia warunek Lipschitza (względem normy euklidesowej) z tą samą stałą. Korzystając raz jeszcze z równoważności norm dostajemy

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{C\tilde{K}}{d} \cdot \frac{1}{c} \cdot \|x - y\|_*,$$

co dowodzi tego, że f spełnia warunek Lipschitza z dowolną normą na $\mathbb{R}^n$.